

# CDO-Squared : Modèle et Simulation de Risque

ZHOU Gang      ZHANG Yan      ER Di      LI Jia

27 mars 2006

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	CDO et CDO-Squared . . . . .	1
1.2	Pricing et les Risques de CDO-Squared . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Le Modèle à Facteur gaussien</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Nos Etudes sur CDO-Squared</b>	<b>4</b>
3.1	Modèle gaussien sans overlapping . . . . .	5
3.2	Modèle gaussien avec overlapping . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>12</b>

## 1 Introduction

### 1.1 CDO et CDO-Squared

Le marché de crédit est en plein essor et est toujours en train de chercher des instruments financiers qui peuvent rendre du spread plus large que ceux traditionnels. CDO (Collateralized Debt Obligations) est un dérivé de crédit avec un portefeuille de produits de crédit sous-jacents et qui offre de certaines protections en tranchant la perte éventuelle encourrue par les crédits dans le portefeuille. Intuitivement, pour une tranche plus la protection est sûre, plus il faut que la perte globale du sous-jacent portefeuille soit haute pour y endommager, et moins le spread espéré est important.

Les CDOs comportent approximativement le Cash CDO et le Synthetic CDO, dont le Cash CDO détient directement des dettes (les bonds ou loans, par exemple) dans le portefeuille, et le Synthetic CDO peut détenir des dérivés de crédit, comme les CDSs, voire d'autres CDOs, dans son portefeuille. Nous allons détailler le mécanisme de ces

produits dans la sous-section suivante.

Le CDO-squared est un type de CDO avec une structure de double couche (two-layer), dont le sous-jacent portefeuille est composé de certaines tranches des single-layer CDOs. Il est structuré comme un single-layer CDO selon le niveau de risque et sa perte est la somme des pertes portées aux certaines tranches des CDOs sous-jacents.

Un cash CDO-squared contient un portefeuille de tranches des Cash CDOs existants. D'autre part, le sous-jacent portefeuille d'un Synthetic CDO-squared est composé de tranches des Synthetic CDOs, qui en général sont créés exprès pour structurer un CDO-squared. D'ici, la tranche dont nous parlerions signifiera la tranche Mezzanine et la subordination signifiera la tranche Equity.

La graphique suivante illustre une structure classique d'un Synthetic CDO-squared. Le Master (ou Outer) CDO fait référence à un portefeuille des tranches (Mezzanine) d'une série de single-layer Synthetic CDOs (Inner CDOs). Chaque Inner CDO peut avoir les structures similaires, même subordination et même taille de tranche.

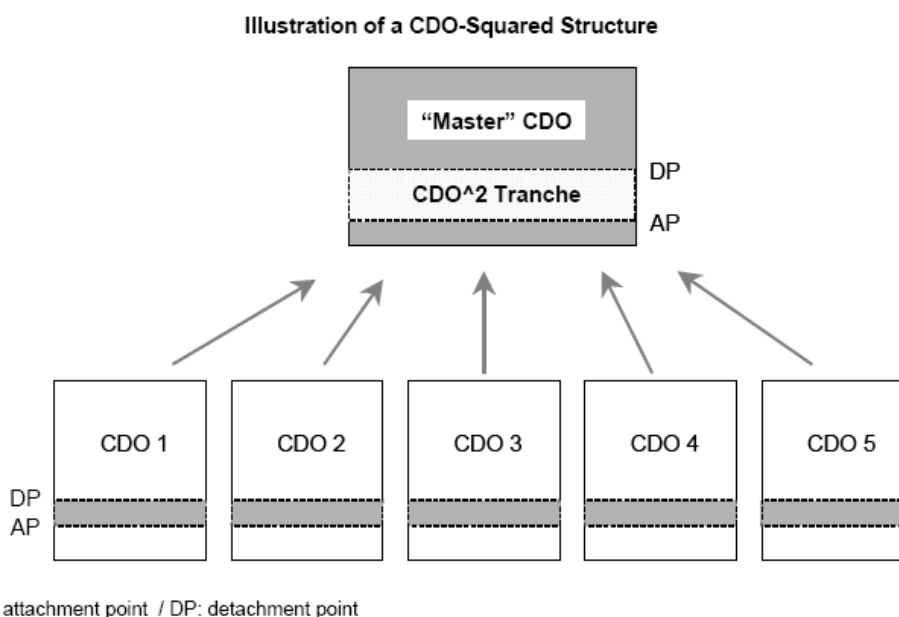


FIG. 1 – Typical CDO-squared Structure

Les tranches dans le Master CDO et les Inner CDOs s'établissent avec des points

d'attachement et points de détachement, qui définissent les tailles de tranche et la subordination. Les pertes souffertes par les tranches des Inner CDOs entrent dans le Master CDO. Notre exercice est d'étudier la perte de la tranche de Master CDO.

### 1.2 Pricing et les Risques de CDO-Squared

CDOs-squared offrent aux investisseurs meilleurs spreads par rapport aux single-layer CDOs mais aussi beaucoup de risques supplémentaires. Dans 5 domaines CDOs-squared peuvent être spécialement sensibles au risque, soit : probabilité de défaut, taux de recouvrement, corrélation de défaut, LGD (Loss Given Default) et taille de tranche, à l'intérieur des CDOs sous-jacents.

Supposons un CDO-squared contient  $N$  Inner CDOs sous-jacents, dont les points d'attachement et détachement sont respectivement  $A_i$  et  $D_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ . De plus, si un Inner CDO subit une perte  $L_i$  à cause d'un défaut, la perte pour la tranche contenue dans ce CDO est

$$L_i(A_i, D_i) = \min(L_i, D_i) - \min(L_i, A_i) \quad (1)$$

Lorsqu'on a obtenu les  $L_i(A_i, D_i)$  pour chaque CDO sous-jacent, on pourra obtenir la perte  $L$  pour la tranche de CDO-squared dont les points d'attachement et de détachement sont  $(A, D)$ . Effectivement

$$L = \min\left(\sum_{i=1}^N L_i(A_i, D_i), D\right) - \min\left(\sum_{i=1}^N L_i(A_i, D_i), A\right) \quad (2)$$

La valeur nominale de un CDO-squared est la somme des tailles des tranches des Inner CDOs. Ce montant est généralement faible par rapport à la somme des valeurs nominales des CDOs sous-jacents. La taille de la tranche de CDO-squared est d'autant plus fine qu'est celle du CDO-squared. Donc s'il y a un risque qui se présente en même temps dans les CDOs sous-jacents, on peut imaginer qu'il s'exacerbe à cause des nombreux CDOs et donc va augmenter la sensibilité du CDO-squared à ce risque. A l'inverse, s'il y a un facteur qui entraîne un impact de diversification de risque sur les CDOs sous-jacents, on verra que le risque du CDO-squared sera effectivement réduit.

On trouvera ci-dessous des études moyennant différents modèles pour étudier les caractéristiques de risque de CDO-squared. [Nomu05] est une bonne référence d'étude du risque de CDO-square par la simulation Monte Carlo.

## 2 Le Modèle à Facteur gaussien

En aperçant que le risque d'un crédit est à la fois liée à la conjoncture économique et à son risque particulier, on a proposé le modèle à facteur gaussien pour modéliser le défaut d'un crédit.

La plus simple forme du modèle suppose que

$$\mathbb{1}_{\text{défaut}} = \mathbb{1}_{P < G},$$

où  $P$  désigne le rendement de l'actif qui suit la loi gaussienne,  $G$  une constante désignant le seuil au-dessous duquel on déclenche le défaut. Cette source d'aléa  $P$  est de plus décomposé en deux variables gaussiennes :

$$P = \rho Y + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma \quad (3)$$

où  $Y$  désigne le rendement dû au marché commun, qui est un risque systématique d'un CDO,  $\sigma$  est indépendant de  $Y$  et désigne le risque particulier de l'actif  $P$ .  $\rho$  est la corrélation du rendement de  $P$  avec le risque systématique de marché.

[AnSi04] a proposé d'étendre ce modèle avec des paramètres comme taux de recouvrement  $R_i$  et les corrélations  $\rho$  stochastiques. En faisant cela on a effectivement introduit un modèle avec regime-switching. Puisque les corrélations peuvent toujours être représentées avec les paramètres du modèle, on peut calibrer les paramètres du modèle avec regime-switching. Il s'avère que ce genre de modèle étendu peuvent conditionner mieux aux skew de corrélation observé sur le marché.

Le copula constitue un outil crucial quand on modélise et étudie la corrélation de plusieurs aléas. [FeSc04] a éclairé sur comment choisir un copula parmi plusieurs alternatives et comment calculer les paramètres. [LaBG05] a mené une étude de comparaison de la performance de plusieurs copulas, soit gaussien, Student  $t$ , Clayton, et Marshall-Olkin, qui sont d'habitude utilisés pour modéliser le crédit. Les copulas gaussien, Student  $t$ , et Clayton offrent des résultats assimilés alors que celui de Marshall-Olkin est bien distinct des 3 premiers.

## 3 Nos Etudes sur CDO-Squared

Nous avons réalisé deux maquettes sous Excel, un correspondant à un modèle gaussien sans overlapping, l'autre à celui gaussien avec overlapping. On suppose que le CDO-squared est composé de 5 single-layer CDOs, et qu'il y a une certaine corrélation entre les risques systématiques des CDOs. On étudie l'impact qu'exercent la

subordination, la taille de tranche, corrélation entre le rendements de l'actif et le risque systématique du marché et cela entre de différents risques systématiques, etc.

### 3.1 Modèle gaussien sans overlapping

On étudie le comportement du CDO-squared avec un Large Homogeneous Portfolio (LHP) où le LGD et la probabilité de défaut pour chaque nom de référence sont les mêmes,  $LGD_i$  et  $DP_i$ . On a le nombre de CDOs sous-jacents  $N = 5$ . Chaque CDO recouvre  $M = 1000$  noms de référence. Soit  $P_j^i$  le rendement de  $j$ -ème nom de référence du  $i$ -ème CDO,  $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M$ , alors

$$P_j^i = \rho_i Y^i + \sqrt{1 - \rho_i^2} \sigma_j^i \quad (4)$$

où  $Y^i$  le risque systématique du CDO  $i$ . On suppose que pour le CDO  $i$ , la corrélation entre le rendement de chaque nom de référence  $P_j^i$  et le risque systématique du marché  $Y_i$  est la même  $\rho_i$ .  $\sigma_j^i$  la portion d'aléa propre à  $P_j^i$ . De plus, on suppose que  $Y_1, \dots, Y_N$  a entre eux des corrélations désignées par la matrice  $A$ ,  $A_{i,j} = \text{corr}(Y_i, Y_j)$ . En l'occurrence,

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ \phi, & i \neq j \end{cases}$$

Comme  $P_j^i$  suit une loi gaussienne centrée réduite  $N(0, 1)$ , on pourrait calculer la seuil pour chaque nom de référence, qui est simplement une fonction de la probabilité de défaut :

$$DP_i = N(G_i) \Rightarrow G_i = N^{-1}(DP_i)$$

où  $N(G_i)$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

La perte globale sur un CDO  $i$  à l'horizon  $T$  est donnée par (sans recouvrement) :

$$L_i = \frac{LGD_i}{M} \sum_{j=1}^M 1_{P_j^i < G_i}$$

où on suppose que la valeur nominale de CDO est 1.

En conditionnant par rapport au risque systématique  $Y_i$ , on peut appliquer la loi de grands nombres :

$$L_i = LGD_i * N \left[ \frac{G_i - \rho_i Y_i}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} \right]$$

On pourra en suite écrire la fonction de répartition pour la perte :

$$P[L_i \leq K] = P\left[\frac{G_i - \rho_i Y_i}{\sqrt{1 - \rho_i^2}} \leq \frac{K}{LGD_i}\right] = P\left[\frac{G_i - \frac{K}{LGD_i} \sqrt{1 - \rho_i^2}}{\rho_i} \leq Y_i\right] = N\left[-\frac{G_i - \frac{K}{LGD_i} \sqrt{1 - \rho_i^2}}{\rho_i}\right]$$

La tranche (Mezzanine) subit une perte  $L_i(A_i, D_i)$

$$L_i(A_i, D_i) = \min(L_i, D_i) - \min(L_i, A_i) = \max(L_i - A_i, 0) - \max(L_i - D_i, 0)$$

Le perte de la tranche en pourcentage s'écrit comme :

$$L_i^{\%}(A_i, D_i) = \frac{L_i(A_i, D_i)}{D_i - A_i} = \frac{\max(L_i - A_i, 0) - \max(L_i - D_i, 0)}{D_i - A_i}$$

Pour calculer l'espérance de cette perte, nous proposons trois méthodes :

D'après O'Kane et Schloegl (2001), on peut trouver une formula de l'espérance de la perte :

$$E[L_i(A_i, D_i)] = LGD_i * \left( N_2 \left( -N^{-1}\left(\frac{A_i}{LGD_i}\right), G_i, -\sqrt{1 - \rho_i^2} \right) - N_2 \left( -N^{-1}\left(\frac{D_i}{LGD_i}\right), G_i, -\sqrt{1 - \rho_i^2} \right) \right)$$

où  $N_2(x)$  est une distribution normale bidimensionnelle.

Ou par le calcul numérique d'intégrale des trapèzes :

$$E[L_i(A_i, D_i)] = \int_{Y_i} L_i(A_i, D_i, y) \varphi(y) dy \approx \sum_{k=1}^n \frac{(L_i(A_i, D_i, y_k) \varphi(y_k) + L_i(A_i, D_i, y_{k+1}) \varphi(y_{k+1}))}{2} (y_{k+1} - y_k)$$

où  $\varphi(y)$  est la fonction de densité d'une loi normale.

Ou directement par le calcul d'intégrale :

$$E[L_i(A_i, D_i)] = \int_{Y_i} L_i(A_i, D_i, y) \varphi(y) dy = D_i N\left(\frac{G_i - N^{-1}\left(\frac{D_i}{LGD_i}\right) \sqrt{1 - \rho_i^2}}{\rho}\right) + LGD_i N_2\left[\frac{G_i - N^{-1}\left(\frac{D_i}{LGD_i}\right) \sqrt{1 - \rho_i^2}}{\rho}, G_i, \rho\right] - A_i N\left(\frac{G_i - N^{-1}\left(\frac{A_i}{LGD_i}\right) \sqrt{1 - \rho_i^2}}{\rho}\right) + LGD_i N_2\left[\frac{G_i - N^{-1}\left(\frac{A_i}{LGD_i}\right) \sqrt{1 - \rho_i^2}}{\rho}, G_i, \rho\right]$$

où  $\varphi(y)$  est la fonction densité d'une loi normale.

Dans le Excel, nous avons comparé les résultats de ceux trois méthodes :

Three methods for calculating	
Expected Loss 1 (%)	14.54%
Expected Loss 2 (%)	14.54%
Expected Loss 3 (%)	14.54%

En utilisant la fonction de répartition de la perte de CDO  $i$ , pour un  $K \leq 1$

$$P(L_i^{\%}(A_i, D_i) \leq K) = P(L_i \leq A_i + K(D_i - A_i))$$

Maintenant on fait varier les paramètres pour comprendre la sensibilité du CDO aux variations des paramètres. Cette approche pourra éclairer sur les caractéristiques de CDO et aussi donner une idée sur l'impact de misspécification des paramètres du modèle de CDO. Les paramètres basics sont : une taille de tranche et subordination de 5% pour les Inner CDOs et le Master CDO, un taux de recouvrement de 40% qui entraîne un LGD de 60%, une probabilité de défaut de 10% et 31.6% (i.e.  $\rho^2 = 10\%$ ) de corrélation à l'intérieur de CDO entre le rendement d'un actif et le facteur systématique.

Dans la figure 2, lorsque on baisse les niveaux de subordination à la tranche mezzanine, la perte globale soufferte par CDO reste inchangée mais la tranche subit plus de perte.

Dans la figure 3, lorsqu'on augmente le niveau de corrélation, ceci se traduit par augmenter la probabilité des événements les plus défavorables. La probabilité que la tranche soit entièrement enlevée devient plus importante. En aggravant les risques dans les queues, augmenter la corrélation atténue la possibilité de perte nulle. Cette intuition correspond au fait qu'on retrouve dans le graphique.

Dans la figure 4, quand on augmente la taille de la tranche, ce revient à diminuer la probabilité que la tranche soit enlevée entièrement par le défaut et baisser la perte en pourcentage. Mais la perte absolue de la tranche devient plus élevée.

	10%	5%	2%
Proba of non-zero loss	39.5%	39.5%	39.5%
Proba of tranche wipe out	0.2%	3.1%	14.6%
Expected Loss	0.8%	0.7%	0.5%
Expected Loss in %	7.8%	14.5%	25.2%

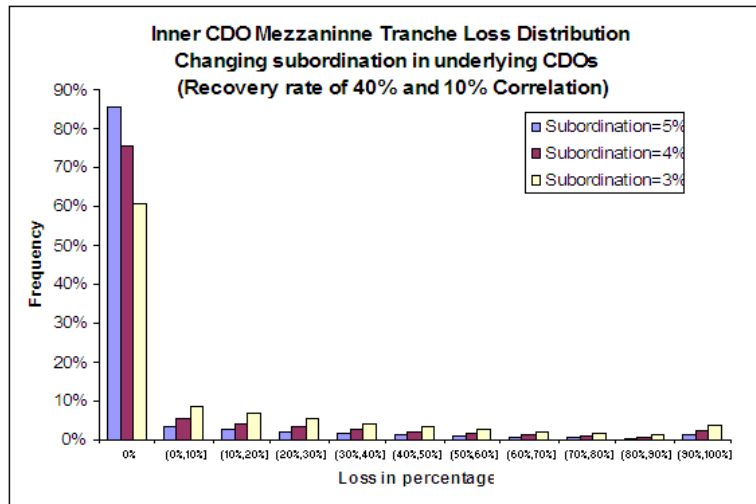


FIG. 2 – Impact de subordination sur la perte de CDO tranche

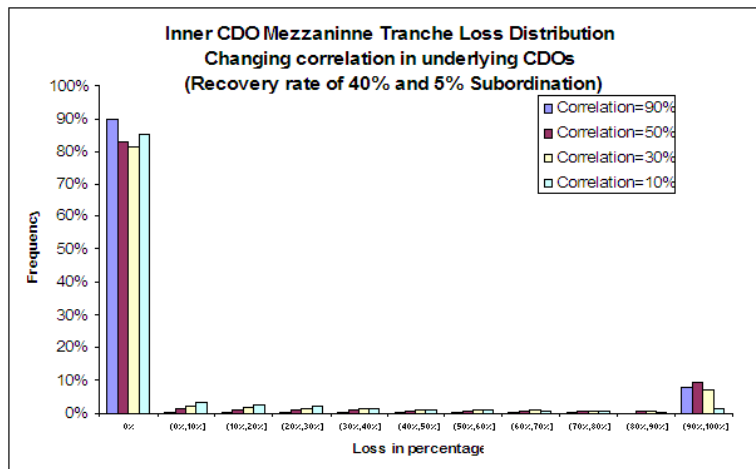


FIG. 3 – Impact de corrélation sur la perte de CDO tranche

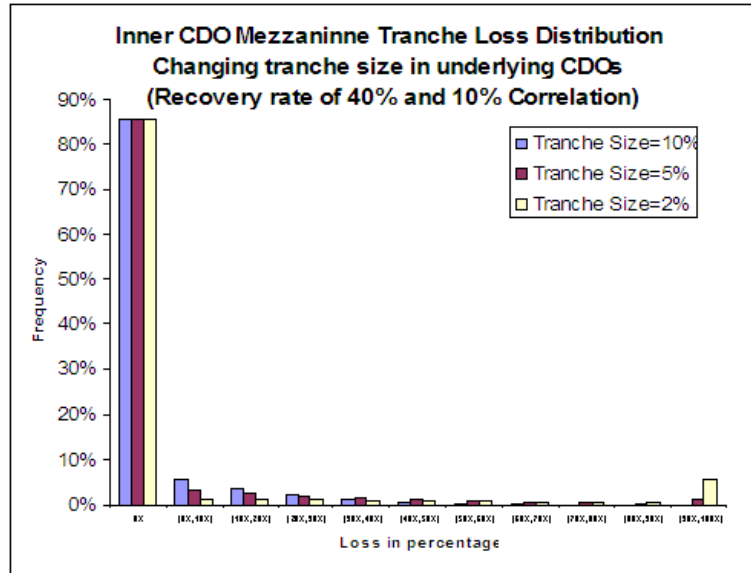


FIG. 4 – Impact de tranche size sur la perte de CDO tranche

Quant à CDO-squared, on fait générer les facteurs systématiques de cinq Inner CDOs en prenant en compte la matrice de corrélation. Puis qu'on calcule la perte globale de chaque CDO afin de trouver la perte soufferte par la tranche de Master CDO. C'est une méthodologie de semi Monte Carlo. Avec un nombre de simulations, on pourrait construire la loi de perte.

En faisant varier les paramètres, étudions aussi les sensibilités de Master CDO par rapport aux variations de trois différents facteurs de risque : subordination, corrélation à l'intérieur de chaque Inner CDO et taille de Inner CDO tranche. Initialement, on suppose 0% de corrélation entre les facteurs systématiques de marché.

Maintenant, nous allons augmenter la corrélation  $\phi$  entre les facteurs systématiques des Inner CDOs. De la graphique suivante 8, on peut en déduire que plus les facteurs systématiques sont dépendants, moins de perte que la tranche de Master CDO subit. En fait, la perte de Master CDO tranche dépend non seulement au nombre de défauts des références mais aussi aux endroits auxquels ils se présentent. Une forte dépendance des facteurs systématiques étale les défauts des références, donc diminue la perte de Master CDO tranche.

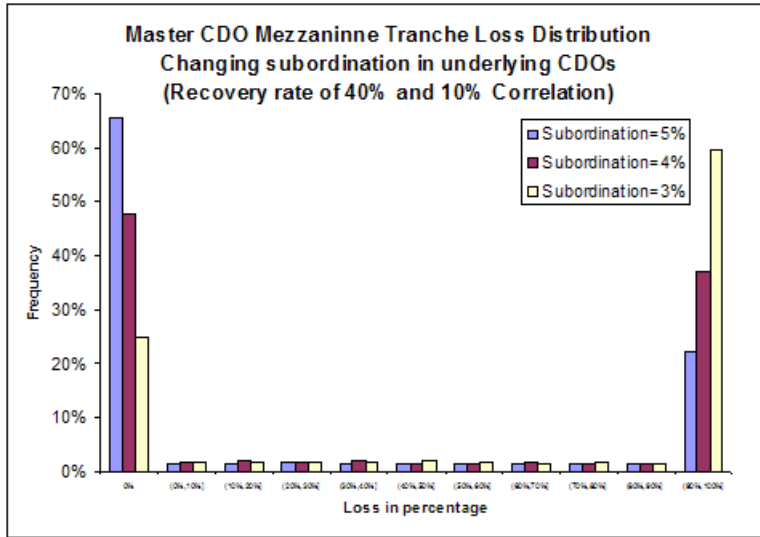


FIG. 5 – Impact de subordination sur la perte de CDO2 tranche

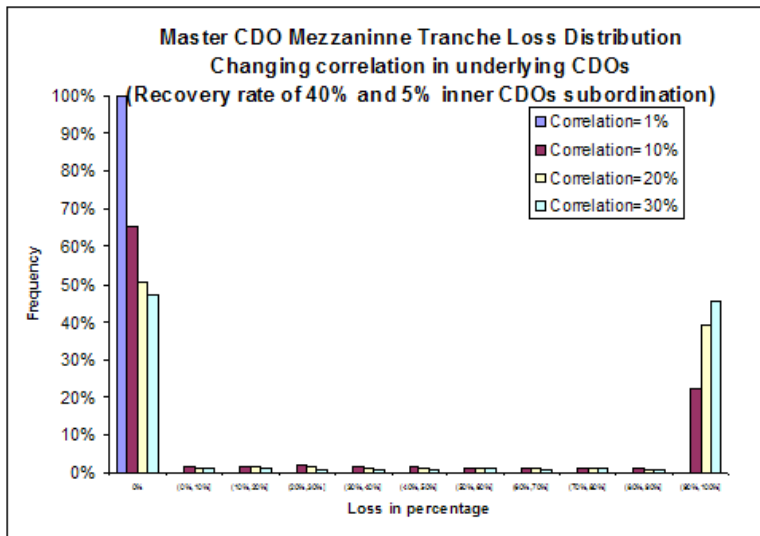


FIG. 6 – Impact de corrélation sur la perte de CDO2 tranche

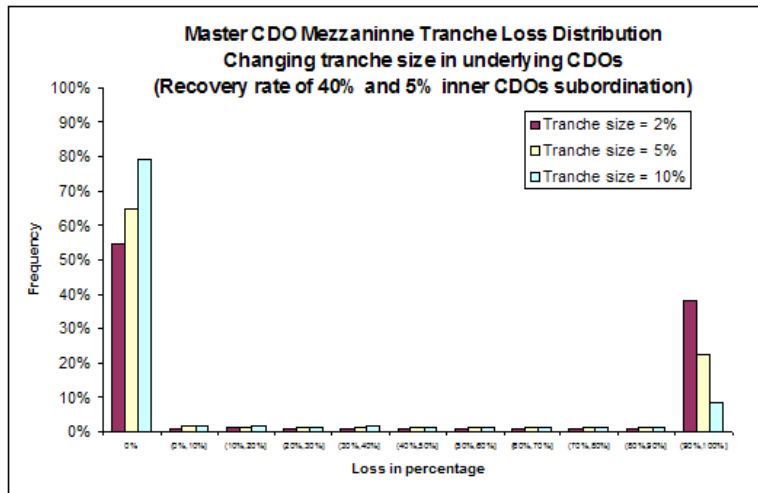


FIG. 7 – Impact de tranche size sur la perte de CDO2 tranche

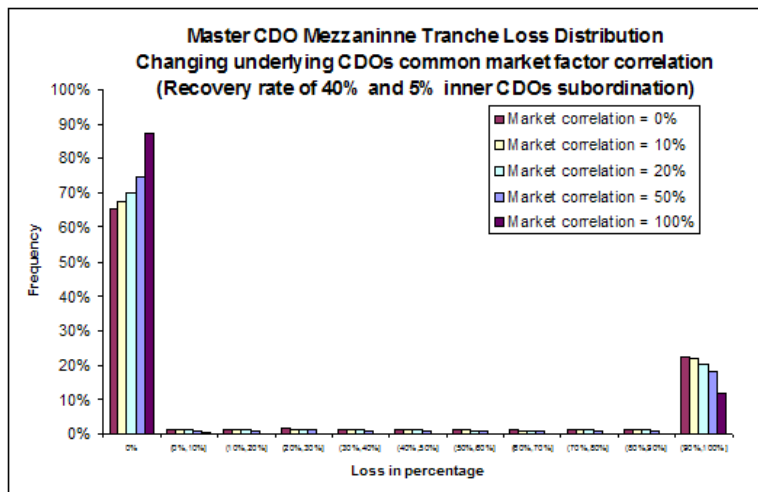


FIG. 8 – Impact de correlation des marché sur la perte de CDO2 tranche

### 3.2 Modèle gaussien avec overlapping

Afin d'étudier l'effet de l'overlapping des noms de référence dans les portefeuilles des CDOs sous-jacents sur le risque du CDO-squared, on prend un vecteur  $O = (O_1, \dots, O_n)'$  décrivant la distribution d'overlapping. L'élément  $O_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  signifie qu'il y a  $O_i$  noms de référence dont chacun est partagé par  $i$  CDO(s) sous-jacent(s).

On avoue que construire des portefeuilles des CDOs sous-jacents exactement tels qu'ils sont requis est difficile. On utilise un simple algorithme pour construire des portefeuilles approximatifs. L'idée consiste à mettre  $O_i$  noms de référence, dans  $i$  portefeuilles chacun, d'ordre incrémental. Supposons que le nombre de noms de références de chaque CDO sous-jacent est  $S$ , alors il faut que

$$SN = \sum_{i=1}^N iO_i$$

Pour chaque nom de référence, on prend encore le modèle gaussien à 1 facteur comme suit,

$$P_i = \rho_i Y + \sqrt{1 - \rho_i^2} \epsilon_i, 1 \leq i \leq \sum_{i=1}^N O_i$$

On permet à  $\rho_i$  de varier à cause des différents ratings des noms de référence.

On a fait ce modèle dans un fichier Excel, on fait  $M$  simulations pour obtenir la loi empirique de perte. Dans chaque simulation, on simule d'abord le facteur systématique  $Y$  de la loi gaussienne, et puis les facteurs  $\epsilon_i$ . Théoriquement la vitesse de convergence est lente et il nous laisse beaucoup d'espace pour accélérer la simulation. On retrouvera tous les résultats similaires aux conclusions auparavant.

## 4 Conclusion

On a pris le modèle gaussien à 1 ou plusieurs facteurs dans ce rapport pour étudier l'effet des différents niveaux de overlapping ou corrélation sur la distribution de la perte et ainsi sur le risque d'un CDO-squared. Nous avons vu qu'en rajoutant une structure de protection de défaut de crédit, un CDO-squared est caractérisé d'une sensibilité plus élevée aux paramètres du modèle en terme de risque. Le spread est donc plus élevé qu'un CDO sous-jacent pour récompenser le risque. Il méritera alors plus d'attention à la couverture d'un CDO-squared, et ce n'est toujours pas facile à comprendre. Une autre possibilité est de décrire le mécanisme avec un modèle plus fin et plus robuste pour prévoir le mouvement de risque. De toute façon, le marché de CDO et de CDO-squared a constaté un développement exponentiel à travers les années, et

les principaux acteurs ne cessent jamais d'inventer des véhicules donnant du spread plus important. En revanche les investisseurs devront se méfier du risque plus élevé en général.

## Références

- [AnSi04] Andersen, Leif, et Jakob Sidenius, Extensions to the Gaussian Copula : Random Recovery and Random Factor Loadings, *Journal of Credit Risk*, 1(1), 29-70, 2004.
- [FeSc04] Fermanian, Jean-David, et Olivier Scaillet, *Some Statistical Pitfalls in Copula Modeling for Financial Applications*, papier de travail, HEC Genève, 2004.
- [LaBG05] Laurent, Jean-Paul, X Burtschell, et Jon Gregory, *A Comparative Analysis of CDO pricing models*, 2005.
- [Lehm03] The Lehman Brothers, *Guide to Exotic Credit Derivatives*, 2003.
- [Nomu05] Nomura Fixed Income Research, *CDOs-Squared Demystified*, note de recherche, 2005. URL [http://www.securitization.net/pdf/Nomura/CDO-Squared\\_4Feb05.pdf](http://www.securitization.net/pdf/Nomura/CDO-Squared_4Feb05.pdf).