COURS SUR LE RISQUE DE CREDIT
EXAMEN Janvier 2006

Exercice 1: modèle à corrélation locale

Dans tout l'exercice, nous considérons un portefeuille de crédit mono-périodique pour lequel le nominal (égal à 1 par exemple), la probabilité de défaut (*p*) et la perte en cas de défaut (*LGD*) sont identiques pour toutes les obligations du portefeuille. On suppose que le portefeuille contient un nombre *N* d'obligations.

Question 1

Dans cette question on suppose l'indépendance des défauts des émetteurs des obligations. Quelle est la loi de la perte de crédit sur un tel portefeuille ?

Question 2

Dans les questions 2 et 3, on suppose que la dépendance des défauts est bien décrite par un modèle structurel où tous les émetteurs ont la même corrélation d'actifs ρ deux à deux. Donnez, en quelques lignes, les hypothèses du modèle structurel (modèle de Merton). Dans ce cadre, donnez la formule liant les différents paramètres du modèles et la corrélation de défaut entre deux émetteurs.

Question 3

Nous rappelons dans le cadre des hypothèses de la question 2 que le rendement d'actif de la firme i peut être décrit par la formule suivante :

$$r_i = \sqrt{\rho}\, F + \sqrt{1-\rho}\, \varepsilon_i$$

Donner la formule de la loi des pertes sur un portefeuille de crédit homogène infiniment granulaire ($N \to \infty$).

Question 4

On suppose à présent, et dans toutes les questions suivantes, que le rendement d'actifs de la firme i est donné par le modèle suivant (corrélation locale) :

$$r_i = \sqrt{\rho(F)}\, F + \sqrt{1-\rho(F)}\, \varepsilon_i$$

La copule décrivant la dépendance des rendements d'actifs est elle encore gaussienne ? Exprimer la loi du rendement d'actif conditionnellement au facteur *F* sous forme d'une intégrale impliquant à la fois la fonction de répartition de la loi normale et sa densité.

Question 5

Démontrer la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{s} N\left(\frac{x-\sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}\right) n(z)\, dz = N_2\left(s, x, \sqrt{\rho}\right)$$

Où $N(.)$ est la fonction de répartition de la loi normale, $n(.)$ est sa densité et $N_2(\cdot,\cdot,\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale bivariée.

Question 6

Supposons que la fonction de corrélation locale soit constante par morceaux. Donnez la fonction de répartition des pertes lorsque :

$$\rho(z) = \rho_1 . 1_{\{z \leq 0\}} + \rho_2 . 1_{\{z > 0\}}$$

Exercice 2: CDO

Nous nous intéressons dans cet exercice au pricing de CDO sur un portefeuille homogène granulaire identique à celui vu dans l'exercice précédent (portefeuille dit de Vasicek). Les paramètres de ce portefeuille sont :

- une perte en cas de défaut : LGD,
- une probabilité de défaut s
- une corrélation entre actifs ρ

Le CDO a plusieurs tranches qui sont : 0%-3%, 3%-6%, 6%-9%, 9%-12%, 12%-22% et 22%-100%. Pour simplifier, nous supposons que la maturité des actifs sous jacent est de un an.

Question 1

Donner la loi des pertes sur chacune des tranches du CDO.

Question 2

Que sont les corrélations de base, et les corrélations composées ?
Le CDO est coté sur les marchés, et on observe pour chaque tranche un spread. Expliquez comment vous procédez pour en déduire les corrélations de base et composées. Quels sont les problèmes que vous pouvez rencontrer ? Comment interprétez vous ces corrélations ?

Exercice 3: Gestion d'un prêt.

En début d'année 2006, vous souhaitez gérer le risque que vous portez sur General Motors auquel vous avez consenti de gros prêts bancaire. Bien sur, vous ne pouvez, pour des raisons commerciales et juridiques vous défaire de vos prêts, et General Motors n'a aucune dette publique sur laquelle vous pourriez acheter un CDS pour couvrir votre prêt.

Indiquez au moins trois méthodes qui vous permettraient de gérer le risque que vous portez sur GM.