RISQUE DE CREDIT – RISQUE DE DEFAUT
ENPC – 2006-2007
EXAMEN – Décembre 2006

Exercice 1 : Positions long / short sur CDS (12 points)

Hypothèses et notations

- La courbe des taux est supposée statique et plate. Le taux sans risque est noté r
- Le taux de recouvrement est appelé R et est supposé constant pour tous les noms de référence
- La maturité T est identique pour tous les CDS
- Le spread à la date d'entrée dans le contrat de CDS sur le nom de référence i est noté s_i. Cette quantité est le spread payé par l'acheteur de protection jusqu'à maturité du swap ; elle est également appelée prime du CDS
- Dans le problème, nous supposerons que la prime du CDS est payée continûment entre la date initiale et la maturité
- La loi du temps de défaut pour chaque CDS est une loi exponentielle de paramètre λ_i

1. Définir les flux d'un CDS et donner la valeur de marché de la jambe payeuse de spread et de la jambe payeuse en cas de credit event. Quelle est la valeur de marché de la position vendeuse de protection à la date d'entrée dans le swap ? Quel est le lien entre s_i et λ_i ?

2. Qu'appelle-t-on DV ? Quelle est la formule de la DV pour le CDS portant sur le i-ème nom de référence ? Si on suppose que $(r+\lambda_i)T << 1$, quels sont les deux premiers termes du développement limité de la DV associée au i-ème CDS ?

3. Un gérant constitue un panier (appelé panier « Long ») vendeur de protection sur N CDS de maturité T pour un nominal unitaire de $1/N$. Si on définit la valeur de marché de la jambe payeuse de spread par $JF = \frac{1}{N}\left(\sum_i s_i\right)DV(T)$, où $DV(T)$ est la duration risquée du panier, calculez $DV(T)$ en fonction de la DV (que l'on notera DV_i) de chaque CDS sous-jacent et des spreads des CDS.

4. Supposons à présent que le panier « Long » contienne un grand nombre de CDS, et que ces CDS aient un spread distribué selon une loi normale autour d'un spread moyen égal à s_0 et avec un écart-type égal à σ. On a ainsi, pour tout nom de référence i on pose :
$$s_i = s_0(1+\sigma\varepsilon_i)$$
On suppose que tous les ε_i sont des réalisations indépendantes d'une même variable aléatoire normale centrée réduite. Calculer l'intensité de défaut λ_i pour chaque CDS. On considère, comme dans la question 3, que pour chaque CDS, $(r+\lambda_i)T << 1$. Calculez la DV du panier « Long » de CDS au premier ordre en σ^2 dans les limites $N \to +\infty$ et $(r+\lambda_i)T << 1$ pour tout *i.* Comment interprétez vous le signe négatif du premier terme correctif de $DV(T)$ en fonction de σ ?

5. Le gérant crée un deuxième panier (appelé panier « Short »), acheteur de protection cette fois. Le spread moyen de ce panier est $\bar{s}_0 < s_0$, et le gérant recherche à être insensible à une évolution du spread moyen sur les deux paniers. On appelle $\overline{DV}(T)$ la duration risquée du panier « Short ». On rappelle que le gérant est vendeur de protection sur le panier « Long » pour un nominal égal à 1. Sur quel nominal l'achat de protection doit-il porter pour que le panier global reste insensible en valeur de marché à une évolution parallèle de tous les spreads des paniers Long et short simultanément ?

6. Donnez la formule du rendement de la stratégie long short, globalement insensible à un mouvement parallèle des spreads. Quelle est la logique et l'intérêt de cette stratégie de gestion ? Le gérant a-t-il intérêt à choisir des spreads très disparates sur le panier « Long » ou au contraire des spreads aussi proches que possibles es uns des autres (autrement dit, va-t-il rechercher un σ faible ou élevé ?). Même question pour le panier « Short ». Veuillez argumenter votre réponse.

Exercice 2 : Maximisation d'un indicateur de performance (8 points)

Dans cet exercice, comptent avant tout les explications et la démarche. Vous ne pouvez pas répondre à toutes les questions par une formule ou un chiffre.

Vous vous spécialisez sur le marché immobilier, indépendamment de la zone géographique (France, US, etc).
Vous avez 100 M€ à investir, et l'on vous propose de vous vendre deux pools de prêts in fine résidentiels granulaires et homogènes de même maturité (par exemple, 15 ans) situés aux US pour le premier, en France pour le second. Chacun des pools paie un spread $Spread_{Pays}$, a une probabilité de défaut PD_{Pays} et une LGD LGD_{Pays}.

La corrélation moyenne d'actifs entre les secteurs immobiliers France et US est de ρ, alors que la corrélation moyenne entre les actifs au sein du secteur immobilier aux US est ρ_{US} et ρ_{France} en France.

Dans cet exercice, la seule source de risque est le risque de crédit sur les pools immobiliers.

1. Pour tout achat d'un montant X_{France} dans le pool immobilier France et d'un montant X_{US} dans le pool immobilier US, écrivez la perte totale comme somme de deux variables aléatoires décrivant les pertes sur pool France et les pertes sur le pool US. Quelle est la corrélation $\tilde{\rho}$ entre les facteurs macro-économiques affectant chacun des deux pools. Quelle est la volatilité σ_{Pays} des pertes sur chacun des deux pools d'actifs. Quelle est enfin la perte moyenne sur le portefeuille ?

2. <u>Vous pouvez continuer cet exercice sans répondre à cette question.</u>
   Calculez la corrélation entre les pertes sur chacun des pools. Pour cela une méthode vous est proposée : il s'agit de calculer dans un premier temps pour deux crédits immobiliers (un aux US, un en France) l'espérance :
   $$\boldsymbol{E}\left[L_{\text{Credit Immo US}} \times L_{\text{Credit Immo France}}\right].$$
   Calculez ensuite cette même espérance sur deux pools composés de N_{US} et N_{France} crédits immobiliers :
   $$\boldsymbol{E}\left[\frac{1}{N_{US}}\left(\sum_i L_{\text{Credit Immo US,i}}\right) \times \frac{1}{N_{France}}\left(\sum_j L_{\text{Credit Immo France,j}}\right)\right].$$
   Déduisez en le résultat (vous avez pour cela besoin de connaître l'écart-type des pertes sur les deux pools immobiliers).

On suppose dans la suite que <u>l'on peut raisonnablement approximer les pertes par unité d'exposition sur chacun des deux pools par une loi normale</u> de moyenne $Perte\,Moyenne_{Pays}$ et d'écart-type σ_{Pays}. Les deux pertes sont corrélées à hauteur de $\rho_{Approx.}$.

3. Avec l'approximation précédente, quelle est la loi des pertes sur le portefeuille total.

4. Le spread de chaque pool couvrant largement les pertes attendues, vous décidez de faire du levier. Vous allez donc financer une partie de vos acquisitions par de l'endettement. Pour un rating cible donné, quel va être le quantile de perte que vous devez couvrir ?

5. Vous disposez d'un montant de capital économique de 100. Calculer, pour un rating cible AA l'allocation optimale de votre investissement entre les deux zones géographiques (France et US).

6. Comment choisir sa structure de capital optimale (sachant que vous devez rester investment grade, soit entre AAA et BBB) ?

Données

Rating	*Spread à 15 ans (en bp)*	*Probabilité de défaut à 15 ans*	*Coût des fonds propres*	*Quantile(PD) Loi N(0,1)*
AAA	20	0,60%	10%	-2,5
AA	30	2,20%	15%	-2,0
A	40	4,90%	20%	-1,7
BBB	50	12,30%	25%	-1,2
BB	100	30,60%	30%	-0,5
B	200	54,50%	35%	0,1
CCC	350	77,10%	40%	0,7

$\rho_{Approx.} = 20\%$,

PD(US)=3%, Spread(US)=450 bp, LGD(US)=100%

PD(France)=2.5%, Spread(France)=400 bp, LGD(France)=100%

Questions diverses (1.5 points + 2.5 points)

1. Une obligation émise par une entreprise paie un spread de 50 bp. En retenant l'hypothèse d'un taux de recouvrement de 55% en cas de défaut, quelle est la date « espérée » de défaut de cette entreprise selon le marché ?

2. Dans le cadre de la réforme Bâle II, les banques doivent connaître la sensibilité de leurs indicateurs de risque (capital économique, capital réglementaire) en cas de forte dégradation de la conjecture économique. Décrivez le modèle de portefeuille implémenté dans votre banque en faisant apparaître, lors de la description, quels paramètres vous semblent bons d'être forcés à des valeurs défavorables. Pensez vous que les résultats de votre étude seraient différents suivant le type de modèle (Mark-to-Loss vs Mark-to-Model) que vous avez ?

SOLUTIONS

Exercice 1

1. Acheteur de protection : paie une prime $s.dt$ entre t et $t+dt$, jusqu'à les première date entre la maturité du swap et le défaut de l'entité de référence. Le prix de marché de la jambe payeuse de spread est :

$$JF = E\left[s\int_0^T dt\, 1_{\{\tau>t\}} e^{-rt} \right] = s\frac{1-e^{-(r+\lambda)T}}{r+\lambda} = s.DV$$

   Vendeur de protection : reçoit une obligation émise par l'entité de référence à la date de défaut de l'entité de référence (si celui-ci intervient avant la maturité du swap) contre paiement du pair. Le prix de marché de la jambe payeuse en cas de défaut est :

$$JV = E\left[1_{\{\tau<T\}} e^{-r\tau}\right]$$

   A la date d'entré dans le swap, $JF = JV$, ce qui fixe la prime du swap. Le vendeur de protection doit toucher la jambe payeuse de spread et payer l'autre. Son MtM est égal à $JF - JV = 0$

2. La DV est la duration risquée du CDS, ie sensibilité au spread du MtM.

$$DV_i \approx T - \frac{T^2}{2}(r+\lambda_i)$$

3. La jambe fixe du panier est égale à la somme des jambes fixes des CDS.

$$\frac{1}{N}\left(\sum_i s_i\right).DV(T) = \sum_i s_i.DV_i$$

4. On trouve en utilisant les formules des questions 3 et 4, ainsi que la relation $\lambda_i = \lambda_0(1+\sigma\varepsilon_i)$:

$$DV(T) \approx T - \frac{T^2}{2}(r+\lambda_0) - \sigma^2\lambda_0\frac{T^2}{2}$$

   Plus les spreads sont disparates plus il y a des actifs risqués dans le portefeuille et plus la DV du portefeuille est courte.

5. Le MtM de la position long / Short en cas de translation des spreads de Δs est $-\Delta s.DV + Nom.\Delta s.\overline{DV}$. Le nominal sur la position short est donc égal à $DV / \overline{DV}$.

6. Le rendement de la position Long short est $s - Nom.\bar{s}$. Le nominal du panier short doit être aussi faible que possible pour maximiser ce rendement. Le gérant a donc intérêt à avoir un σ aussi élevé que possible sur la poche long et aussi faible que possible sur la poche short.

Exercice 2

1. Facteurs Macros M_F et M_{US} . Il suffit de trouver la corrélation entre les deux. Il faut pour cela poser $M_F = \sqrt{\tilde{\rho}}\, M + \sqrt{1-\tilde{\rho}}\, \varepsilon_F$. Idem pour US.

   On a pour chaque actif (suivant son pays d'appartenance) : $r_i = \sqrt{\rho_{Pays}} M_{Pays} + \sqrt{1-\rho_{Pays}}\varepsilon_i$.

   Donc la corrélation d'actifs moyenne entre deux actifs dans deux pools différents est

$\tilde{\rho}\sqrt{\rho_{US}\rho_F}$ ce qui permet de calculer $\tilde{\rho}$.
Alternative : poser deux facteurs Macros indépendants et calculer la sensibilité des actifs à chacun d'entre eux dans les deux pools.

Ensuite

Loi des pertes $X_F.Vasicek_{PD_F,LGD_F,\rho_F}(M_F)+...$ avec M_F, M_{US} loi normales standard corrélées (corrélation $\tilde{\rho}$)
Perte Moyenne : $X_F.PD_F.LGD_F+....$

2. $\boldsymbol{E}[L_{\text{Credit Immo US}}\times L_{\text{Credit Immo France}}]=N_2\left(N^{-1}(PD_{US}),N^{-1}(PD_{France}),\rho\right)$. La formule reste vraie pour plusieurs crédits (faire éventuellement les calculs intermédiaires).
Donc la covariance est
$\boldsymbol{E}[L_{\text{Credit Immo US}}\times L_{\text{Credit Immo France}}]=N_2\left(N^{-1}(PD_{US}),N^{-1}(PD_{France}),\rho\right)-PD_{US}LGD_{US}.PD_F LGD_F$.
Diviser ensuite par l'écart-type des pertes de chaque pool Vasicek (pour le calculer, cf td 6, en suivant le même raisonnement, par passage à la limite)

3. Loi Gaussienne de moyenne $X_F.PD_F.LGD_F+....$ et de variance $\sigma^2_{X_F,X_{US}}=X_F^2\sigma_F^2+2\rho_{Approx}\cdots$
4. Quantile de perte = 1- Probabilité de Défaut à 15 ans.

5. Il faut introduire une mesure de performance ici. On va devoir chercher X_F et X_{US} ainsi :

$$\max_{\text{Capital Economique}=100}\left\{\begin{array}{c}X_F.[Spread_F-PD_F.LGD_F]+X_{US}.[Spread_{US}-PD_{US}.LGD_{US}]\\ -\underbrace{(X_F+X_{US}-100)}_{\substack{\textit{partie financée}\\ \textit{par dette}}}.Spread_{Rating}-k_{Rating}.100\end{array}\right\}$$

La contrainte est équivalente à

$100=(X_F+X_{US})x\sigma_{X_F,X_{US}}\times N^{-1}(1-PD_{Rating})$ on peut la replacer dans la fonction à optimiser. Avec un peu de chance pas de solution en coin, sinon, il faut faire les choses plus proprement en posant le Lagrangien du problème L=Fonction à optimiser – λ . $\left[100-(X_F+X_{US}).\sigma_{X_F,X_{US}}\times N^{-1}(1-PD_{Rating})\right]$

6. Seconde optimisation sur les ratings.

Questions diverses

1. L'intensité de défaut est égale à 0.5%/(1-55%)=1.11%. La date espérée de défaut est 90 ans.

2. Modèle = (Ratings, Facteurs de risque, Structure de dépendance, MTL vs MTM). Possibilités : denotchings, matrice de transition, décalages facteurs (1 ou plusieurs en même temps), matrice de corrélation plus corrélée. Si méthodologie en MTL, on a plus de sensibilité à la longueur de la crise qu'en MTM.