EXAMEN RISQUE DE DEFAUT - RISQUE DE CREDIT

ENPC – 21 déc 2007

Nota Bene : Rédigez les deux derniers exercices sur une copie séparée.

Portefeuille de prêts (10 pts)

On s'intéresse dans cet exercice à un portefeuille bancaire de prêts homogènes (même probabilité de défaut, même LGD). On supposera dans tout cet exercice que ce portefeuille est parfaitement décrit par le modèle de Vasicek dont les paramètres seront : PD, LGD, ρ . La maturité résiduelle des prêts est égale à un an et on suppose de plus –pour simplifier- que les taux d'intérêts sont nuls.

1. Rappelez dans un premier temps les hypothèses du modèle de Vasicek et explicitez la fonction de répartition des pertes sur le portefeuille.

2. Quelle est la variance des pertes sur le portefeuille ?

3. Donnez la définition de la VaR ainsi que de l'Expected Shortfall pour un fractile α donné. Pour un tel quantile, explicitez les formules permettant de calculer l'Expected Shortfall de niveau α .

   Indication :
   Exprimer l'évènement $\{L \geq VaR\}$ en fonction de *f*, le facteur de risque commun aux actifs du portefeuille.
   Calculez pour chaque actif $\boldsymbol{E}\{L_i | L \geq VaR_\alpha\} = N_2(,,)$
   avec $N_2(\,,\,,\,)$ loi de répartition d'une loi binormale, puis terminez le raisonnement.

4. Vous souhaitez « trancher » le portefeuille en CDO. Pour une tranche de point d'attachement AP et de point de détachement DP donnés,
   a. Indiquez sous quelle condition sur la perte totale sur le portefeuille la tranche est touchée
   b. Calculez la probabilité de perte de la tranche
   c. Calculez la perte moyenne sur la tranche (à l'aide de la question 3c)

5. Déduisez en le spread que vous êtes prêt à offrir sur cette tranche pour la couvrir.

6. <u>Question subsidiaire</u>
   On souhaite construire une tranche notée BBB par deux agences de notation. La première agence de notation note en « PD » alors que la seconde note en « EL ». Pour les niveaux PD_{BBB} et EL_{BBB} correspondant donnés, calculez les points d'attachement et de détachement de la tranche.

P&L d'une position de trading (3 pts)

La courbe des spreads sur un émetteur est supposée plate (s=50bp). Un trader prend une position vendeuse de protection à 5 ans et acheteuse de protection à 7 ans sur des nominaux de 10 MEUR. Quel est son P&L le lendemain si le spread 5 ans est monté à 52 bp et le spread 7 ans est monté à 55 bp ?

Portefeuille bancaire optimal (7 pts)

Considérons un portefeuille de crédit de N lignes. Nous adoptons les notations suivantes :

- x_i est la pondération de la ligne i dans le portefeuille
- s_i est le rendement net de la ligne i
- Cb_i est la contribution au capital économique de la ligne i
- EC est le capital économique du portefeuille
- FP est le montant de fonds propres de la banque
- Le coût du capital de la banque est noté k

1. Démontrer que $Cb_i = x_i \dfrac{\partial EC}{\partial x_i}$
2. L'EVA totale pour la banque s'écrit : $EVA = \sum_i x_i s_i - k.EC$. On suppose que le coût du capital est indépendant de a composition du portefeuille (des x_i). Quelle interprétation économique donneriez-vous à cette hypothèse ?
3. On suppose que la banque cherche à maximiser son EVA, sous la contrainte $EC \leq FP$. Quel est le sens de cette contrainte ? Démontrer qu'à l'optimum, la contrainte est forcément saturée.
4. Démontrer qu'à l'optimum, les RAROC de chaque ligne du portefeuille sont tous égaux.

CORRECTION

Portefeuille de prêts

1. Les hypothèses du modèle de Vasicek sont rappelées dans le cours.
2. Variance = $LGD^2 \left\{N_2\left(N^{-1}(PD), N^{-1}(PD), \rho\right) - PD^2\right\}$
3. Les pertes extrêmes sont
   a. VaR= $N^{-1}(\alpha).\sqrt{LGD^2 \left\{N_2\left(N^{-1}(PD), N^{-1}(PD), \rho\right) - PD^2\right\}}$
   b. VaR= $LGD \times N\left(\dfrac{N^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}N^{-1}(1-\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$
   c. On a $\{L \geq VaR_\alpha\} = \{f \leq N^{-1}(1-\alpha)\}$
   Donc
   $$\boldsymbol{E}\{L | L \geq VaR_\alpha\} = \frac{1}{1-\alpha}\boldsymbol{E}\left\{L\mathbf{1}_{\{f \leq N^{-1}(1-\alpha)\}}\right\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\leq n\leq N} LGD \times \boldsymbol{E}\left\{\mathbf{1}_{\{\sqrt{\rho}f + \sqrt{1-\rho} \leq N^{-1}(PD)\}}\mathbf{1}_{\{f \leq N^{-1}(1-\alpha)\}}\right\}$$
   $$= \frac{N_2\left(N^{-1}(1-\alpha), N^{-1}(PD), \sqrt{\rho}\right)}{1-\alpha}$$
4.
   a. La tranche est touchée si la perte sur le pool L est supérieure au point d'attachement, ce qui ce traduit en :
   $$LGD \times N\left(\frac{N^{-1}(PD) - \sqrt{\rho}f}{\sqrt{1-\rho}}\right) \geq AP \quad \text{i.e. } f \leq \frac{N^{-1}(PD) - \sqrt{1-\rho}N^{-1}\left(\frac{AP}{LGD}\right)}{\sqrt{\rho}}$$
   b. On calcule la perte moyenne sur une tranche [AP,100%]. On remarque que celle-ci est égale à ES_α avec $\alpha = 1 - N\left(\dfrac{N^{-1}(PD) - \sqrt{1-\rho}N^{-1}\left(\frac{AP}{LGD}\right)}{\sqrt{\rho}}\right)$ qui représente la probabilité de perte positive sur la tranche.
   c. On écrit ensuite Perte [AP,DP]=Perte[AP,100%]- Perte[DP,100%]
5. (DP-AP) / (1+Spread)= (DP-AP) – Perte [AP,DP]
6. La condition sur la probabilité de perte fixe le point AP. Le point DP est fixé par la seconde condition sur la perte moyenne.
   A noter qu'il faut la condition $EL_{BBB} \leq PD_{BBB}$

Portefeuille bancaire optimal

1. La formule d'Euler donne : $EC = \sum_i x_i \dfrac{\partial EC}{\partial x_i}$
2. La rémunération exigée par l'actionnaire dépend du secteur d'activité plus que du détail du portefeuille auquel il n'a pas accès.
3. Le montant de capital alloué est inférieur au montant total de fonds propres. Le programme d'optimisation s'écrit :
   $$\max_{x_i}\left[\sum_i x_i s_i - k.EC\right] - \lambda(EC - FP)$$
   Si la contrainte n'est pas saturée, on a $\lambda = 0$, et à l'optimum $EVA = 0$. Il n'y a donc pas de création de valeur.
4. A l'optimum, on trouve $\dfrac{x_i s_i}{Cb_i} = k + \lambda$

P&L d'une position de trading

DV 5 ans = 4.39
DV 7 ans = 5.84
Initialement, il n'y a pas d'échange de flux entre les contreparties de swaps.
P&L=-10 MEUR.DV5.(0.52%-0.50%)+10 MEUR.DV7.(0.55%-0.50%) = 20431 EUR