Risque de crédit – risque de défaut
Examen ENPC
28 novembre 2008

Durée de l'épreuve : 1h30

La note finale du module est égale à 2/3 de la note maximale plus 1/3 de la note minimale entre l'examen écrit et le projet. Cette épreuve comprend deux exercices, notés sur 10 points chacun.
Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : Contribution en covariance (10 pts)

Définitions et notations

Soit un portefeuille de crédit composé de N instruments de dette. La perte sur l'instrument numéro i est une variable aléatoire L_i qui peut prendre toutes les valeurs entre 0 et 1. On appelle x_i le nominal de la ligne i. La perte totale sur le portefeuille est égale à :

$$L = \sum_{j=1}^{N} x_j L_j$$

On note $N(x)$ la fonction de répartition de la loi normale, $n(x)$ sa fonction de densité et $N_2(x, y, \rho)$ la fonction de répartition de la loi normale bivariée de paramètre de corrélation ρ. Nous rappelons :

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} dy \exp(-x^2/2) \quad \text{et} \quad N_2(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} dv \exp\left(-\frac{u^2 - 2\rho uv + v^2}{2(1-\rho^2)}\right)$$

1. Soit une mesure de risque R sur ce portefeuille. Montrer qu'une règle d'allocation du risque ligne à ligne peut être définie par :

$$Cb_i = x_i \frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\mathrm{var}(L)} R$$

2. Démontrer, dans la limite $x_i \to 0$, qu'il est possible d'avoir $Cb_i > x_i$. Pour cela, on effectuera un développement limité de la contribution marginale Cb_i au premier ordre en x_i, et se placera dans le cas particulier $R = 10\sqrt{\mathrm{var}(L)}$.

3. On suppose à présent que la distribution de la perte sur le portefeuille considéré suit une loi de Vasicek de paramètres s et ρ. Quelle est l'interprétation économique de ces deux paramètres ? Calculez $\mathrm{var}(L)$.

4. Nous appelons F le facteur macroéconomique. En choisissant $L_i = 1_{\{F<x\}}$, où x est un nombre réel compris entre 0 et 1, calculez $\mathrm{cov}(L_i, L)$.

5. Montrez qu'au premier ordre en ρ, nous avons :

$$N_2(a, b, \rho) \approx N(a)N(b) + \rho\, n(a)n(b)$$

6. Calculez la contribution de la ligne numéro i au risque total du portefeuille au premier ordre en ρ. Construisez explicitement un exemple illustrant le résultat de la question 2.

Exercice 2 : Stratégies de tranches de CDO (10 pts)

L'objectif de cet exercice est d'identifier la source de risque principale sur les tranches de CDO. Dans cet exercice, on supposera qu'un panier infiniment granulaire homogène de créances est tranché en trois tranches equity, mezzanine et senior, définies par les points d'attachement A et de détachement D de la tranche mezzanine.

Le taux de défaut moyen sur le panier sera noté $PD = N(s)$, la perte moyenne sur le panier sera PD x LGD (où LGD est le taux de perte sur chacun des actifs du panier) et la corrélation d'actifs interne au panier est notée ρ.

1) Calculez la perte moyenne sur chacune des tranches.

2) Pour chacune des tranches, calculez la sensibilité de la perte moyenne aux paramètres sur le panier s, LGD, ρ.

3) A partir de la question 2, indiquez pour chaque tranche à quel type de risque elle est le plus sensible

4) Déterminez les points d'attachement A et D de façon à construire une stratégie long / short auto-financée (c'est à dire que la perte moyenne totale sur la stratégie doit être nulle) qui soit :
    a. Neutre à un choc sur s
    b. Neutre à un choc sur la corrélation
    c. Neutre simultanément à un choc sur s et corrélation

Solution de l'exercice 1

1. Il s'agit d'une règle d'allocation car $\sum_i Cb_i = R$.

2. Au premier ordre : $Cb_i / x_i \approx 10\rho\sigma_i$, où ρ est la corrélation entre la perte sur la ligne i et la perte du portefeuille, et σ_i est l'écart-type de la perte sur la ligne i . Selon la valeur de ces paramètres, rien n'interdit que cette quantité soit supérieure à 1.

3. Voir polycopié du cours page 49. On obtient $\mathrm{var}(L) = N_2(s,s,\rho) - N(s)^2$

4. On calcule :

$$\mathrm{cov}(L_i, L) = E\left[L.1_{\{F<x\}}\right] - N(s)\,N(x) = \int_{-\infty}^{x} dF\, n(F)\, N\left(\frac{s-\sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right) - N(s)\,N(x) = N_2(s,x,\sqrt{\rho}) - N(s)\,N(x)$$

5. La fonction binormale s'écrit :

$$\begin{aligned} N_2(a,b,\rho) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{a} dx \int_{-\infty}^{b} dy \exp\left(-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right) \\ &\approx \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{a} dx \int_{-\infty}^{b} dy \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2(1-\rho^2)}\right)\left(1+\frac{\rho}{1-\rho^2}xy\right) \\ &\approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{a} dx \int_{-\infty}^{b} dy \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)(1+\rho xy) \end{aligned}$$

6. On a $\mathrm{var}(L) \approx \rho\, n(s)^2$ et $\mathrm{cov}(L_i, L) \approx \sqrt{\rho}\, n(s)\, n(x)$ La contribution de la ligne numéro i s'écrit :

$$Cb_i / x_i = 10 n(x)$$

Le résultat ne dépend pas d'autres paramètres que x . On peut donc choisir x tel que ce ratio soit supérieur à 1.

Solution de l'exercice 2

1. Pour une tranche attachant au point A et détachant en D, on a : $EL(A,D) = E\left[(L-A)^+ - (L-D)^+\right]$.Or :

$$\begin{aligned} E\left[(L-A)^+\right] &= \int_A^1 (L-A)f(L)dL \\ &= \int_{-\infty}^{F_A} (L(F)-A)n(F)dF \\ &= LGD.N_2(s,F_A,\sqrt{\rho}) - A.N(F_A) \end{aligned}$$

avec $F_A = \dfrac{s-\sqrt{1-\rho}N^{-1}(A/LGD)}{\sqrt{\rho}}$

2. La sensibilité de chaque terme binormal à la LGD est au premier ordre égale à $N_2(s,F_A,\sqrt{\rho})$. La sensibilité à s se calcule exactement. La sensibilité à la corrélation est au premier ordre (en ne considérant que le premier terme) : $\dfrac{LGD}{2\sqrt{\rho}} n_2(s,F_A,\sqrt{\rho})$

3. Il existe une relation entre le spread , la probabilité de défaut (ou l'intensité de défaut) et la LGD (ou le recouvrement) : $spread = \lambda(1-R)$. La tranche mezzanine est surtout sensible au risque de spread (sensibilité à s et à LGD) et très peu sensible à la corrélation. La tranche equity est sensible au spread et à la corrélation, mais surtout au spread car l'effet de levier est très important. La tranche equity est longue en corrélation. La tranche senior est sensible également à ces deux facteurs de risque, mais surtout à la corrélation car l'effet de levier est faible ; elle est short en corrélation.

4. Les stratégies neutres en spread sont de type long equity, short mezzanine. Le ratio des nominaux est égal au ratio des leviers de chaque tranche, ce qui garantie à la stratégie un rendement (carry) positif. Bien-sûr cette stratégie est longue en corrélation, et le rendement vient rémunérer le risque de corrélation. Les tranches neutres en corrélation sont les tranches mezzanines. Elles ont aussi un carry positif qui rémunère le risque de spread (et de défaut). Une stratégie neutre en corrélation et en spread serait d'être long sur le portefeuille sous-jacent et short sur une tranche mezzanine. Il est possible qu'on ait encore un carry positif qui vient rémunérer le risque de défaut.