Risque de défaut – risque de crédit
Examen ENPC
3 décembre 2010

Durée de l'épreuve : 1h30

La note finale du module est égale à 2/3 de la note maximale plus 1/3 de la note minimale entre l'examen écrit et le projet. Cette épreuve comprend deux exercices, notés sur 10 points chacun.
Les documents ne sont pas autorisés.

Hypothèses communes aux deux exercices

- La courbe de taux sans risque est plate ; le taux sans risque est noté r.
- Les coupons des obligations et les primes running des CDS sont payés en temps continu.
- Le taux de recouvrement associé à un émetteur est noté R et est supposé constant et égal à 40%.

Exercice 1 : Expected shortfall dans le modèle de Vasicek (5 pts)

Considérons un portefeuille de crédit homogène dans lequel les émetteurs ont tous la même probabilité de défaut $PD = N(s)$ et la même corrélation d'actifs ρ .

1. Quelle est la probabilité que la perte totale sur le portefeuille soit supérieure à la perte moyenne ?
2. Quelle est la perte attendue au delà de la perte moyenne ?

Exercice 2 : Courbe de spread (5 pts)

Supposons que l'intensité de défaut associée à un émetteur soit égale à 1% entre les maturités 0 et 5 ans et égale à 1.5% au-delà.

1. Quelle est la probabilité de défaut entre t et $t+dt$, conditionnellement à ce que l'émetteur soit encore en vie à la date t ?
2. Quelle est la probabilité de défaut à horizon 7 ans sur cet émetteur ?

Exercice 3 : Sensibilité d'une obligation au Z-spread (10 pts)

Considérons une obligation de maturité T, qui paye un taux de coupon par unité de temps c et rembourse son principal en intégralité à maturité. La loi du temps de défaut de l'émetteur est une loi exponentielle de paramètre λ . Soit P le prix de cette obligation rapporté à un euro de nominal.

1. En déterminant les cash-flows de l'obligation dans chacune des situations futures, déterminez le lien entre son prix et l'intensité de défaut de l'émetteur, le taux sans risque, le taux de recouvrement et le taux de coupon payé par l'obligation.
2. Exprimez ce prix en fonction du spread de crédit de l'émetteur et en faisant apparaître la fonction $DV(s/(1-R))$ vue en cours et dont on admettra sans démonstration la formule. Quelle est la signification de la DV ?
3. Le Z-spread est le spread fixe (identique à toutes les maturités) au-dessus du taux sans risque qui redonne le prix de marché de l'obligation en actualisant au taux risqué les cash-flows de l'obligation dans le scénario sans défaut. Le Z-spread est noté z. Montrez que le prix de l'obligation s'écrit de manière similaire à la question 2 : $P = 1 + [c - (r + z)].DV(z)$
4. Démontrez que pour une obligation « au pair » (lorsque $P=1$) le spread de marché et le Z-spread sont égaux.
5. Pour une obligation au pair, la sensibilité du prix de l'obligation au Z-spread est-elle supérieure ou inférieure à la sensibilité au spread de marché ?

Corrigé

Exercice 1

1. $P\left(L \geq N(s)\right) = N\left(\dfrac{1-\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}}s\right)$

2. $E\left(L \middle| L \geq N(s)\right) = \dfrac{N_2\left(s, \dfrac{1-\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}}s, \sqrt{\rho}\right)}{N\left(\dfrac{1-\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{\rho}}s\right)}$

Exercice 2

1. $P\left[\tau \in [t, t+dt] \middle| \tau \geq t\right] = \lambda_t dt$

2. La fonction de répartition s'écrit : $P[\tau \leq t] = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right)$. Pour t=7, on trouve 7.7%

Exercice 3

1. L'obligation a 3 types de cash-flows : (i) les coupons jusqu'à maturité sauf si défaut, le remboursement complet du principal s'il n'y a pas de défaut et sinon le montant de recouvrement à la date de défaut. Le prix de l'obligation pour 1 euro de nominal s'écrit : $P = c.DV(\lambda) + e^{-(r+\lambda)T} + \lambda R.DV(\lambda)$
2. Avec la relation $s = \lambda(1-R)$, nous avons $P = 1 + \left[c - (r+s)\right].DV(s/(1-R))$
3. $P = \int_0^T c.e^{-(r+z)t}dt + e^{-(r+z)T}$, ce qui conduit au résultat
4. Lorsque l'obligation est au pair, on a $c = r + s = r + z$, d'où le résultat
5. Lorsque l'obligation est au pair, la sensibilité du prix au spread de marché ou au Z-spread ne contient qu'un seul terme. On a :

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -DV(s/(1-R))$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} = -DV(z)$$

Or, la fonction DV est décroissante (plus le risque de crédit est élevé et plus la DV est faible). Donc,

$$\frac{\partial P}{\partial s} \geq \frac{\partial P}{\partial z}$$