

ECOLE DES PONTS ET CHAUSSEES
Risque de défaut – risque de crédit
Examen 2012-2013

L'examen est noté sur 20. 10 points sont consacrés à des questions de cours (questions portant la marque « Cours »). La durée de l'examen est de 1h30. Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : Risque de corrélation sur une tranche de CDO (12 pts)

Hypothèses :

- Le portefeuille est homogène infiniment granulaire
- taux sans risque nul
- le portefeuille a un spread moyen s , chaque actif ayant lui-même un spread s , une intensité de défaut λ et une perte en cas de défaut LGD. La maturité des actifs est égale à un an

1. (Cours) Rappelez –après l'avoir démontré- le lien entre s , LGD, et λ
2. (Cours) Rappelez les hypothèses principales du modèle de Vasicek
3. (Cours) Calculez la variance des pertes sur le portefeuille dans le cadre des hypothèses de Vasicek
4. (Cours) Exprimez la fonction de densité des pertes sur le portefeuille
5. Quelle est la perte attendue pour une tranche de points d'attachement A et de détachement B ?
6. Quel est le prix de l'obligation zéro-coupon indexée sur cette tranche ?
7. Quelle est la sensibilité du prix de la tranche au paramètre de corrélation en fonction des points d'attachement et de détachement ?

Exercice 2 : Obligations risquées (5 pts)

Pour cet exercice le taux d'intérêt continu est noté r et la loi du temps de défaut de l'émetteur est une loi exponentielle de paramètre λ .

1. Calculez le prix d'une obligation risquée de nominal N , maturité T et qui paie un coupon continu par unité de temps égal à cdt . Quel est le prix de cette obligation si elle est perpétuelle ?
2. Calculez le prix d'une obligation risquée zéro-coupon perpétuelle. Expliquez pourquoi son prix est supérieur à celui de la même obligation sans risque de crédit.
3. Un *bond extendable* est une obligation perpétuelle que l'émetteur a le droit de racheter au prix P à une date t . Quelle est la condition sur le spread de marché de l'émetteur à la date t qui conduit à l'exercice de l'option pour un zéro-coupon extendable ? On supposera que la relation de la question 1 de l'exercice 1 reste valable.

Exercice 3 : question générale (3 pts)

(Cours) Redonnez les grandes lignes de la réforme Bâle 2.5.

Correction

Exercice 1

1. spread = $\lambda \times \text{LGD}$
2. Cf cours. Le seuil du modèle de Vasicek est relié au spread de marché par la relation : $s = N^{-1}(e^{-\lambda T}) = N^{-1}(e^{-\text{spread} \times T / \text{LGD}})$
3. Cf cours
4. Cf cours
5. La perte attendue sur la tranche [A,D] est la différence entre la perte attendue sur la tranche senior attachant en A et celle sur la tranche senior attachant en D. La perte attendue sur la tranche senior attachant en A est égale à :

$$\begin{aligned}
 E[(L-a)^+] &= E[\mathbf{1}_{\{f \leq f_a\}}(L-a)] = E[\mathbf{1}_{\{f \leq f_a\}}L] - E[\mathbf{1}_{\{f \leq f_a\}}a] \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E \left[\mathbf{1}_{\{f \leq f_a\}} \mathbf{1}_{\left\{ \sqrt{\rho} f + \sqrt{1-\rho} \varepsilon_i \leq N^{-1} \left(\frac{s}{\text{LGD}} \right) \right\}} \right] - E[\mathbf{1}_{\{f \leq f_a\}}a] \\
 &= N_2 \left(f_a, N^{-1} \left(\frac{s}{\text{LGD}} \right), \sqrt{\rho} \right) - E[\mathbf{1}_{\{f \leq f_a\}}a]
 \end{aligned}$$

6. Le prix du zéro-coupon de nominal 1 est égal à $1 - EL^{A,D} / (D - A)$
7. Si $A=0$, on a une tranche equity => long en corrélation
Si $D=100\%$, on a une tranche senior => short en corrélation
Entre ces deux situations, on a une compensation partielle de la sensibilité en corrélation selon que le point d'attachement est très bas ou très haut.

Exercice 2

1. $P/N = e^{-(r+\lambda)T} + (c + \lambda R) \frac{1 - e^{-(r+\lambda)T}}{r + \lambda}$. Le prix du bond perpétuel est $P/N = \frac{c + \lambda R}{r + \lambda}$
2. Zéro-coupon perpétuel : $P/N = \frac{\lambda R}{r + \lambda} > 0$. Le zéro-coupon perpétuel sans risque vaut toujours 0 car il ne paie aucun flux.
3. La condition d'exercice est $\frac{c + \lambda R}{r + \lambda} < P/N$. En utilisant la relation $s = \lambda(1 - R)$, nous pouvons écrire la condition d'exercice sur le niveau de spread de marché.