

Ecole des Ponts – Cours risque de défaut risque de crédit

Examen du 19/12/2014

Durée 1h30

(documents non autorisés)

Dans les deux premiers exercices, nous supposons (pour certaines questions) qu'il existe un risque de change. Nous supposons que ce risque se matérialise instantanément, uniquement à la date $t = 0^+$. Les dettes des emprunteurs sont toutes supposées être des zéro-coupons de maturité T , comme dans le modèle de Merton.

Exercice 1 : Modèle de Merton pour les crédits en devises

Dans cet exercice, nous considérons une entreprise qui a une dette zéro-coupon pour un montant nominal D à une maturité T . Nous nous plaçons dans les hypothèses du modèle de Merton. Nous supposons que la valeur des actifs $(A_t)_{t \geq 0}$ suit un processus log-normal de paramètres de drift μ et de volatilité σ respectivement.

1. Rappeler la définition de l'évènement de défaut dans le modèle de Merton
2. Expliquer pourquoi le paramètre de drift est égal au taux instantané sans risque
3. Calculer la probabilité de défaut de l'entreprise.
4. Montrer que cette probabilité s'écrit $P(\epsilon \leq s)$, où ϵ est une variable aléatoire normale centrée réduite et s est une constante à déterminer.
5. Supposons à présent que les actifs de l'entreprise sont libellés dans une devise différente de celle de la dette. Supposons $X_0 = 1$ et supposons qu'un choc de change se produit instantanément : $X_{0^+} = X <$

1. Montrer que la probabilité de défaut après le choc est égale à :

$$PD(X) = N\left(s - \frac{\ln X}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Exercice 2 : Crise du rouble

Dans cet exercice, nous supposons que nous sommes dans le cadre du modèle de Vasicek et que le portefeuille est composé d'entreprises toutes identiques à celle de l'exercice 1. Nous supposons que les corrélations d'actifs des entreprises du portefeuille sont égales à 20% et les probabilités de défaut en l'absence de risque de change sont égales à 1% d'ici la maturité du portefeuille supposée égale à 4 ans. Nous supposons le taux de recouvrement nul sur ce portefeuille et que le paramètre de volatilité σ des actifs de l'emprunteur est égal à 50%. On pourra utiliser, sans les redémontrer, les résultats de l'exercice 1.

1. Rappeler les hypothèses du modèle de Vasicek.
2. Calculer la perte moyenne (EL1) sur le portefeuille en l'absence de risque de change et la VaR à 99.9% (V1) du portefeuille.
3. Nous supposons qu'il y a du risque de change, et qu'un choc instantané de 40% se produit sur le cours de change, i.e. : $X = 60\%$. Montrer que nous sommes toujours dans le cadre du modèle de Vasicek et recalculer la perte moyenne à maturité (EL2) et la VaR à 99.9% (V2) sur ce portefeuille.
4. Expliquer pourquoi les fonds propres réglementaires alloués à ce portefeuille sont égaux à $V1-EL1$ avant le choc de change et à $V2-EL2$ après.
5. Qu'est ce que le Return on Equity (ROE) ?
6. Nous supposons que la marge de la banque est $m = 2\%$. Calculer le ROE sur le portefeuille avant et après le choc de change.

Exercice 3 : Questions diverses

1. A quoi servent les exercices de stress test organisés par les banques centrales ?
2. Comment expliqueriez-vous la notion de corrélation à un interlocuteur non mathématicien ?

Table de la fonction de répartition de la loi normale

| s | N(s) | s | N(s) | s | N(s) | s | N(s) | s | N(s) |
|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|---------|-------|---------|
| -3 | 0,135% | -2,5 | 0,621% | -2 | 2,275% | -1,5 | 6,681% | -1 | 15,866% |
| -2,99 | 0,139% | -2,49 | 0,639% | -1,99 | 2,330% | -1,49 | 6,811% | -0,99 | 16,109% |
| -2,98 | 0,144% | -2,48 | 0,657% | -1,98 | 2,385% | -1,48 | 6,944% | -0,98 | 16,354% |
| -2,97 | 0,149% | -2,47 | 0,676% | -1,97 | 2,442% | -1,47 | 7,078% | -0,97 | 16,602% |
| -2,96 | 0,154% | -2,46 | 0,695% | -1,96 | 2,500% | -1,46 | 7,215% | -0,96 | 16,853% |
| -2,95 | 0,159% | -2,45 | 0,714% | -1,95 | 2,559% | -1,45 | 7,353% | -0,95 | 17,106% |
| -2,94 | 0,164% | -2,44 | 0,734% | -1,94 | 2,619% | -1,44 | 7,493% | -0,94 | 17,361% |
| -2,93 | 0,169% | -2,43 | 0,755% | -1,93 | 2,680% | -1,43 | 7,636% | -0,93 | 17,619% |
| -2,92 | 0,175% | -2,42 | 0,776% | -1,92 | 2,743% | -1,42 | 7,780% | -0,92 | 17,879% |
| -2,91 | 0,181% | -2,41 | 0,798% | -1,91 | 2,807% | -1,41 | 7,927% | -0,91 | 18,141% |
| -2,9 | 0,187% | -2,4 | 0,820% | -1,9 | 2,872% | -1,4 | 8,076% | -0,9 | 18,406% |
| -2,89 | 0,193% | -2,39 | 0,842% | -1,89 | 2,938% | -1,39 | 8,226% | -0,89 | 18,673% |
| -2,88 | 0,199% | -2,38 | 0,866% | -1,88 | 3,005% | -1,38 | 8,379% | -0,88 | 18,943% |
| -2,87 | 0,205% | -2,37 | 0,889% | -1,87 | 3,074% | -1,37 | 8,534% | -0,87 | 19,215% |
| -2,86 | 0,212% | -2,36 | 0,914% | -1,86 | 3,144% | -1,36 | 8,691% | -0,86 | 19,489% |
| -2,85 | 0,219% | -2,35 | 0,939% | -1,85 | 3,216% | -1,35 | 8,851% | -0,85 | 19,766% |
| -2,84 | 0,226% | -2,34 | 0,964% | -1,84 | 3,288% | -1,34 | 9,012% | -0,84 | 20,045% |
| -2,83 | 0,233% | -2,33 | 0,990% | -1,83 | 3,362% | -1,33 | 9,176% | -0,83 | 20,327% |
| -2,82 | 0,240% | -2,32 | 1,017% | -1,82 | 3,438% | -1,32 | 9,342% | -0,82 | 20,611% |
| -2,81 | 0,248% | -2,31 | 1,044% | -1,81 | 3,515% | -1,31 | 9,510% | -0,81 | 20,897% |
| -2,8 | 0,256% | -2,3 | 1,072% | -1,8 | 3,593% | -1,3 | 9,680% | -0,8 | 21,186% |
| -2,79 | 0,264% | -2,29 | 1,101% | -1,79 | 3,673% | -1,29 | 9,853% | -0,79 | 21,476% |
| -2,78 | 0,272% | -2,28 | 1,130% | -1,78 | 3,754% | -1,28 | 10,027% | -0,78 | 21,770% |
| -2,77 | 0,280% | -2,27 | 1,160% | -1,77 | 3,836% | -1,27 | 10,204% | -0,77 | 22,065% |
| -2,76 | 0,289% | -2,26 | 1,191% | -1,76 | 3,920% | -1,26 | 10,383% | -0,76 | 22,363% |
| -2,75 | 0,298% | -2,25 | 1,222% | -1,75 | 4,006% | -1,25 | 10,565% | -0,75 | 22,663% |
| -2,74 | 0,307% | -2,24 | 1,255% | -1,74 | 4,093% | -1,24 | 10,749% | -0,74 | 22,965% |
| -2,73 | 0,317% | -2,23 | 1,287% | -1,73 | 4,182% | -1,23 | 10,935% | -0,73 | 23,270% |
| -2,72 | 0,326% | -2,22 | 1,321% | -1,72 | 4,272% | -1,22 | 11,123% | -0,72 | 23,576% |
| -2,71 | 0,336% | -2,21 | 1,355% | -1,71 | 4,363% | -1,21 | 11,314% | -0,71 | 23,885% |
| -2,7 | 0,347% | -2,2 | 1,390% | -1,7 | 4,457% | -1,2 | 11,507% | -0,7 | 24,196% |
| -2,69 | 0,357% | -2,19 | 1,426% | -1,69 | 4,551% | -1,19 | 11,702% | -0,69 | 24,510% |
| -2,68 | 0,368% | -2,18 | 1,463% | -1,68 | 4,648% | -1,18 | 11,900% | -0,68 | 24,825% |
| -2,67 | 0,379% | -2,17 | 1,500% | -1,67 | 4,746% | -1,17 | 12,100% | -0,67 | 25,143% |
| -2,66 | 0,391% | -2,16 | 1,539% | -1,66 | 4,846% | -1,16 | 12,302% | -0,66 | 25,463% |
| -2,65 | 0,402% | -2,15 | 1,578% | -1,65 | 4,947% | -1,15 | 12,507% | -0,65 | 25,785% |
| -2,64 | 0,415% | -2,14 | 1,618% | -1,64 | 5,050% | -1,14 | 12,714% | -0,64 | 26,109% |
| -2,63 | 0,427% | -2,13 | 1,659% | -1,63 | 5,155% | -1,13 | 12,924% | -0,63 | 26,435% |
| -2,62 | 0,440% | -2,12 | 1,700% | -1,62 | 5,262% | -1,12 | 13,136% | -0,62 | 26,763% |
| -2,61 | 0,453% | -2,11 | 1,743% | -1,61 | 5,370% | -1,11 | 13,350% | -0,61 | 27,093% |
| -2,6 | 0,466% | -2,1 | 1,786% | -1,6 | 5,480% | -1,1 | 13,567% | -0,6 | 27,425% |
| -2,59 | 0,480% | -2,09 | 1,831% | -1,59 | 5,592% | -1,09 | 13,786% | -0,59 | 27,760% |
| -2,58 | 0,494% | -2,08 | 1,876% | -1,58 | 5,705% | -1,08 | 14,007% | -0,58 | 28,096% |
| -2,57 | 0,508% | -2,07 | 1,923% | -1,57 | 5,821% | -1,07 | 14,231% | -0,57 | 28,434% |
| -2,56 | 0,523% | -2,06 | 1,970% | -1,56 | 5,938% | -1,06 | 14,457% | -0,56 | 28,774% |
| -2,55 | 0,539% | -2,05 | 2,018% | -1,55 | 6,057% | -1,05 | 14,686% | -0,55 | 29,116% |
| -2,54 | 0,554% | -2,04 | 2,068% | -1,54 | 6,178% | -1,04 | 14,917% | -0,54 | 29,460% |
| -2,53 | 0,570% | -2,03 | 2,118% | -1,53 | 6,301% | -1,03 | 15,151% | -0,53 | 29,806% |
| -2,52 | 0,587% | -2,02 | 2,169% | -1,52 | 6,426% | -1,02 | 15,386% | -0,52 | 30,153% |
| -2,51 | 0,604% | -2,01 | 2,222% | -1,51 | 6,552% | -1,01 | 15,625% | -0,51 | 30,503% |

De plus $N(-3.09) = 0.1\%$

Corrigé

Exercice 1

1. La valeur des actifs à maturité de la dette est inférieure à la valeur faciale de la dette
2. Cf. cours. Marché complet, existence d'un actif sans risque
3. $P[A_T < D] = N\left(\frac{\ln D/A_0 - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$
4. $P[A_T < D] = N(s) = P(\epsilon < s)$
5. Probabilité de défaut suite au choc de change : $P[XA_T < D] = N\left(s - \frac{\ln X}{\sigma\sqrt{T}}\right)$

Exercice 2

1. Voir cours
2. $EL1 = N(s) = 1\%$ et $V1 = N\left(\frac{s - \sqrt{\rho}N^{-1}(0.1\%)}{\sqrt{1-\rho}}\right) = 14.55\%$
3. Nous sommes dans le modèle de Vasicek avec un paramètre de seuil de défaut modifié :

$$s \rightarrow s^* = s - \frac{\ln X}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$EL2 = N(s^*) = 3.47\% \text{ et } V2 = N\left(\frac{s^* - \sqrt{\rho}N^{-1}(0.1\%)}{\sqrt{1-\rho}}\right) = 31.4\%$$

4. Avant le choc les fonds propres réglementaires sont égaux à l'unexpected loss sur le portefeuille, i.e. $V1 - EL1$ et $V2 - EL2$ après le choc de change.
5. Le ROE (Return on Equity) mesure la rentabilité des fonds propres, i.e. le ratio entre la marge de la banque et les fonds propres réglementaires
6. Le ROE avant le choc est égal à 14.75% et à 7.16% après le choc.