

Risque de défaut – risque de crédit
Examen ENPC
4 décembre 2009

Durée de l'épreuve : 1h30

La note finale du module est égale à $\frac{2}{3}$ de la note maximale plus $\frac{1}{3}$ de la note minimale entre l'examen écrit et le projet. Cette épreuve comprend deux exercices, notés sur 10 points chacun.
Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : « Economics » d'un CDO

Une banque est en charge de la structuration et du montage d'un CDO cash. Le SPV achète des actifs ayant un profil d'amortissement « bullet » à la date de lancement de l'opération et émet à cette même date trois tranches de dette : dette equity (pour un montant nominal de 10 MEUR, dette mezzanine (pour un montant nominal de 20 MEUR) et senior (pour un montant nominal de 70 MEUR). Les frais « upfront » supportés par le CDO sont de 2 MEUR. On suppose que le spread payé par les actifs est de 200 bp, le spread payé par la tranche senior est de 100 bp et le spread payé par la tranche mezzanine est de 200 bp. On suppose que les coupons sont tous payés annuellement pendant 5 ans (maturité des actifs et de l'opération) à la fois sur les actifs et le passif du SPV et que les frais running supportés par le SPV sont nuls. Enfin on suppose que le taux de référence est de 5%.

1. Expliquez ce qu'est un CDO cash et dans quel objectif ce type de structure est généralement monté. Expliquez à quoi correspondent les frais « upfront ».
2. Expliquez le principe de la « waterfall ».
3. Calculez le taux de coupon annuel que touche l'investisseur equity dans le scénario sans défaut.
4. Qu'est ce que « l'excess spread » et à quoi sert-il ?
5. On suppose que certains actifs font défaut en fin d'année 2, pour un montant nominal de 3 MEUR, et que le montant de recouvrement est nul. Déduisez-en les cash-flows d'intérêt et de principal que va toucher l'investisseur equity dans ce scénario.

Exercice 2 : Sensibilité d'une tranche equity de CDO à certains paramètres

1. Rappelez la vision optionnelle du payoff d'une tranche equity de CDO en fonction de la valeur finale du collatéral, à la lumière du modèle de Merton.
2. Dans le modèle de Vasicek pour les portefeuilles de crédit, nous rappelons que les hypothèses sont l'homogénéité et la granularité du portefeuille. Calculez l'écart-type de la perte sur le portefeuille en fonction de la probabilité de défaut des actifs et le paramètre de corrélation.
3. Montrez que la tranche equity est « longue » en corrélation, c'est-à-dire que son prix augmente avec le paramètre de corrélation.
4. Calculez par un argument de théorie des options le signe du « theta » de la tranche equity c'est-à-dire le sens de variation de son prix avec le passage du temps, tous les autres facteurs de risque restant inchangés. Interprétez ce résultat de manière intuitive, en raisonnant par exemple sur la probabilité de n'avoir aucun défaut sur le collatéral.

Exercice 3 : Indicateurs réglementaires IRC et CRM

L'objectif de cet exercice est d'étudier dans un cas simple les nouveaux indicateurs réglementaire IRC et CRM en faisant appel à des notions vues dans le cours. L'exercice est simplifié au maximum et on acceptera ainsi deux hypothèses :

- a. toutes les obligations ont une maturité de 1 an, de forme zéro-coupon,
- b. détenir une obligation est strictement équivalent à être long d'un zéro-coupon non risqué et short d'un CDS de même maturité sur l'obligation risquée (de maturité 1 an).

Le taux d'intérêt sans risque est nul.

Dans cette première partie, on s'intéresse au portefeuille de CDS et de d'obligations traité sous l'indicateur IRC. Celui-ci –pour rappel- consiste en une VaR à un an au quantile de 99,9%. Autrement dit, en terme « probabiliste » l'IRC est tel que $P[P\&L \leq -IRC] = 1 - 99,9\%$ ou $P[-P\&L \leq IRC] = 99,9\%$, où P&L représente la variation (aléatoire) de Mark-to-Market sur le portefeuille, prise sur un horizon de un an

On rappelle également que le P&L est mesuré sous-jacent par sous-jacent de la manière suivante :

- à l'instant $t=0$, l'instrument a un mark-to-market, une maturité (1 an) et un spread donné correspondant à son rating initial,
- à l'instant $t=1$ an, l'instrument a un mark-to-market recalculé à l'aide de sa maturité inchangée (soit 1 an) et du spread correspondant à son nouveau rating.
- Le P&L sur l'instrument est la différence entre le mark-to-market à un an et le mark-to-market initial.

1. en fonction des spreads initiaux et finaux et de la duration risquée sur un contrat de CDS sur lequel vous êtes « long », indiquer quel est au premier ordre la variation de mark-to-market sur l'instrument. Pour cela, vous écrirez quel est le mark-to-market sur la position de CDS sur laquelle vous êtes long (pour contrôler le signe, faites varier le spread à la hausse et à la baisse). Explicitiez l'ensemble des calculs.
2. On se place dans un modèle de portefeuille très simple similaire à celui vu en cours. Le modèle est un modèle à un facteur et on considèrera un niveau de corrélation constant entre les rendements d'actifs du portefeuille.
 - a. Expliquez comment simuler les transitions de rating instrument par instrument.
 - b. Calculez, en fonction des composantes de la matrice de transition, de la composition du portefeuille et de la corrélation du portefeuille la perte moyenne sur le portefeuille. Pouvez vous calculer l'écart-type des pertes sur ce portefeuille (indication : regarder la covariance des pertes entre deux instruments) ?

On se place maintenant dans le cadre du CRM. Le CRM est l'équivalent de l'IRC, appliqué au périmètre des produits de corrélations, c'est à dire tranches d'indices, CDO sur portefeuilles corporates, etc ... L'objectif de cette seconde partie est de proposer une méthode Monte-Carlo simple pour le calcul de l'indicateur CRM.

3. Rappelez, pour un portefeuille homogène, quels sont les paramètres de valorisation d'un tranche de CDO. Expliquez ce que sont les corrélations de base et implicite.

Pour la suite, on considère que toutes les corrélations qui peuvent intervenir sont « flat ».

4. Pour un portefeuille granulaire homogène de paramètres PD, LGD et ρ , calculez la perte moyenne sur une tranche de point d'attachement AP et de détachement DP.
5. Si vous considérez que vous pouvez représenter un portefeuille composé de 10 obligations de spreads s_i et de corrélation ρ , expliquez comment vous pouvez procéder à une simulation de variation de valeur sur une tranche de CDO sur portefeuille bespoke.

Indication : trouvez les paramètres PD, LGD et ρ qui permettent de « fitter » aux premier et deuxième ordres le portefeuille à l'aide d'une loi de Vasicek. La tranche de CDO est valorisée à hauteur de sa valeur faciale à laquelle on retranche la perte attendue sous probabilité risque-neutre.

Corrigé

Exercice 1

1. cf. cours
2. cf. cours
3. Le coût de la dette est de 5.6 MEUR par an et le collatéral rapporte des intérêts égaux à 6.86 MEUR par an. Le taux de coupon perçu par l'investisseur equity, rapporté au nominal de cette tranche est de 12.6%.
4. L'excess spread correspond aux intérêts distribués à l'investisseur equity après avoir payé les intérêts sur les tranches de dette. Si des pertes surviennent sur le collatéral, l'excess spread sert à éponger les pertes.
5. En fin d'année 2, on constate une perte de 3 MEUR. On en déduit les flux suivants pour la tranche equity :

Date	Nominal	Xss	Pertes à absorber	int. Eqty	principal equity
1	98	1,26	0	1,26	0
2	98	1,26	0	1,26	0
3	95	1,05	3	0	0
4	95	1,05	1,95	0	0
5	95	1,05	0,9	0,15	5

Exercice 2

1. Voir cours
2. $\text{var}(L) = N_2(s, s, \rho) - N(s)^2$
3. Le payoff de la tranche equity est un call sur la valeur finale des actifs. Si la corrélation augmente, la variance des actifs augmente. Puisque le call est vega positif, la tranche equity est longue en corrélation.
4. Le call est theta négatif. Intuitivement, lorsque le temps passe, la probabilité de n'avoir aucun défaut sur le collatéral augmente, ce qui diminue la volatilité des pertes finales et donc celle de la valeur des actifs. La valeur de l'equity diminue donc avec le passage du temps.

Correction exercice 3

1. Variation du Mark-to-Market

Je suis long protection. Une augmentation du spread correspond à une augmentation du risque sur le sous-jacent pour lequel je paie donc une protection en deçà du prix de marché. Je suis donc gagnant.

La différence de Mark-to-Market est :

$$\Delta \text{MtM} = (\text{Spread Marché} - \text{Spread Initial}) \times \text{Duration (positive)}$$

2. Modèle de portefeuille simplifié

a. Transitions de rating

Cf séance 4 du cours

b. Perte moyenne sur portefeuille

$$\text{Perte Moyenne} = \sum_i \sum_{\text{Rating } R} \text{Nominal}_i \times \underbrace{\Delta \text{MtM}_{\text{Rating } i, R}}_{\text{changement de valeur pour un passage de Rating } i \text{ à } R} \times P[\text{Rating } i \rightarrow R]$$

$$\begin{aligned} \text{Espérance Perte}^2 &= \sum_i \sum_{\text{Rating } R} \text{Nominal}_i^2 \times \underbrace{\Delta \text{MtM}_{\text{Rating } i, R}^2}_{\text{changement de valeur pour un passage de Rating } i \text{ à } R} \times P[\text{Rating } i \rightarrow R] \\ &+ 2 \sum_{i > j} \sum_{\text{Rating } R(i), \text{Rating } R(j)} \text{Nominal}_i \times \text{Nominal}_j \times \Delta \text{MtM}_{\text{Rating } i, R(i)} \\ &\times \Delta \text{MtM}_{\text{Rating } j, R(j)} \times P[\text{Rating } i \rightarrow R(i), \text{Rating } j \rightarrow R(j)] \end{aligned}$$

3. Valorisation d'une tranche de CDO

Cf cours

4. Perte sur tranche, portefeuille homogène

Cf TD

5. Approximation de variation de valeur

Approximer le portefeuille non granulaire par un portefeuille homogène tel que :

- Perte moyenne identique
- Ecart type des pertes identique